

Pedagoška fakulteta Maribor  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Matematika in...  
Fizika

1. kolokvij pri predmetu OSNOVE ANALIZE  
3.12.2004

1. Določi naravni definicijski območji naslednjih funkcij:

a)  $f(x) = \ln \left( \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \right) \right)$ ,

b)  $f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1} + \operatorname{arc\,sin} \left( \log_4 \frac{x}{2} \right)$ .

2. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 & ; x \leq 0 \\ e & ; 0 < x < 1 \\ x^2 - 3e & ; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & ; x < e \\ \sqrt{\ln x} & ; x \geq e. \end{cases}$$

Določi kompozituma  $f \circ g$  in  $g \circ f$ .

3. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Za  $n \in \mathbb{N}$  označimo  $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$ .

- a) Zapiši predpise in definicijska območja funkcij  $f_n$  za  $n \leq 5$ .  
b) Določi  $f_n$  in skiciraj graf funkcije  $f_{2004}$ .

4. Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je podana s predpisom:

$$f(x) = |x^2 - 1| - |x + 1|.$$

- a) Skiciraj graf funkcije  $f$  ter ugotovi, ali je funkcija  $f$  injektivna in ali je surjektivna.  
b) Reši neenačbo  $f(x) \leq 4$ .

Naloge so enakovredne.  
Čas reševanja je 120 minut.

2. kolokvij pri predmetu OSNOVE ANALIZE  
11.2.2005

1. V kompleksni ravnini skiciraj vsa kompleksna števila  $z$ , za katera velja

$$z^3 + i|z|^3 \in \mathbb{R} \quad \text{in} \quad |z| \leq 2.$$

2. a) Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x^2\right)^{\frac{e^x}{1 - \cos x}}.$$

- b) Funkcija  $f$  je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(1-x)}{1-\sqrt{2-x}} & ; x < 1 \\ b & ; x = 1 \\ \frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x}-1} & ; x > 1 \end{cases}.$$

Določi števili  $a, b \in \mathbb{R}$  tako, da bo funkcija  $f$  zvezna v točki  $x = 1$ .

3. Funkciji  $f$  in  $g$  sta podani s predpisoma

$$f(x) = \sqrt[x]{x} \quad \text{in} \quad g(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

Naj bo  $t$  tangenta na graf funkcije  $f$  v točki  $(1, f(1))$ . Poišči vse točke, v katerih je normala na graf funkcije  $g$  vzporedna s premico  $t$ .

4. Funkcija  $f$  je podana s predpisom  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Določi števili  $a, b \in \mathbb{R}$  tako, da bosta premici  $y = 1 - x$  in  $2y = x + 2$  tangenti na graf funkcije  $f$ .

Pedagoška fakulteta Maribor  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Matematika in...  
Fizika

3. kolokvij pri predmetu OSNOVE ANALIZE

22.4.2005

1. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right); \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}x)}.$$

2. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje skiciraj graf funkcije:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

3. Dani sta točki  $A(-1, 0)$  in  $B(2, 0)$ . Poišči tisto točko  $C$  na krožnici  $x^2 + y^2 = 9$ , za katero je obseg trikotnika  $ABC$  največji.

4. Izračunaj integrala:

$$\text{a) } \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x - \sin^2 x}} dx \qquad \text{b) } \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Naloge so enakovredne.  
*Čas reševanja je 120 minut.*

Pedagoška fakulteta Maribor  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Matematika in...  
Fizika

4. kolokvij pri predmetu OSNOVE ANALIZE

2.6.2005

1. Naj bo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq ||x - 1| - 1|, -2 \leq x \leq 2\}$ . S pomočjo določenega integrala izračunaj:

- a) Ploščino območja  $D$ .
- b) Prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem območja  $D$  okoli osi  $x$ .

2. Zaporedje  $(a_n)$  je podano rekurzivno s predpisom:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n - 1}{4a_n + 1}.$$

Dokaži, da je zaporedje  $(a_n)$  omejeno in monotono ter izračunaj njegovo limito.

3. Naj bo  $a > 1$ . Ugotovi, ali konvergirata vrsti:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{a^{2n}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{1 + a^n}.$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj tudi njeno vsoto.

4. Dana je potenčna vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n.$$

Določi konvergenčno območje podane vrste in izračunaj njeno vsoto.

Naloge so enakovredne.