

## ODVOD (1. skupina nalog)

1. Z uporabo definicije odvoda izračunaj odvode podanih funkcij:

a)  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x+1}$

b)  $f(x) = \cos x$

c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

d)  $f(x) = a^{x^2}, a > 0.$

2. Ugotovi, ali je funkcija  $f(x) = |x+2|$  odvedljiva v točki  $x = -2$ .

3. Naj bosta  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljivi funkciji. Pokaži, da velja:

a)  $f$  liha  $\Rightarrow f'$  soda,

b)  $f$  soda  $\Rightarrow f'$  liha,

c)  $f$  soda,  $g$  liha  $\Rightarrow (f \circ g)'$  in  $(g \circ f)'$  lihi.

4. Z uporabo pravil za odvajanje funkcij in tabele odvodov elementarnih funkcij izračunaj odvode naslednjih funkcij:

a)  $f(x) = (x+1)(x-1)$

b)  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x^7}}$

c)  $f(x) = a^{3x^2}, a > 0$

d)  $f(x) = e^{\frac{2}{x}}$

e)  $f(x) = e^{ax} \operatorname{ch}(bx)$

f)  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

g)  $f(x) = x^n \ln \frac{a}{x}$

h)  $f(x) = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$

i)  $f(x) = \sin^2 x + \cos(2x)$

j)  $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x$

k)  $f(x) = \cos(\sqrt{\ln x})$

l)  $f(x) = \left( \operatorname{tg}(2x) + \frac{1}{\cos(2x)} \right)^3$

m)  $f(x) = 2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-2x}$

n)  $f(x) = \ln(\operatorname{sh}(2x)) + \operatorname{Ar} \operatorname{th}(\operatorname{tg} x)$

o)  $f(x) = \sin(nx) \sin^n x$

p)  $f(x) = \operatorname{arc} \cos(\sin x^2 - \cos x^2).$

5. Izračunaj  $f'(x)$ , če je:

a)  $f(x) = x^x$

b)  $f(x) = (\cos x)^{\sin x}.$

6. Pokaži, da lahko najdemo inverzno funkcijo funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  podane s predpisom  $f(x) = x^3 + 3x$  in določi odvod inverzne funkcije.

7. Funkcija  $f$  je podana s predpisom:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & ; x < 1 \\ ax + bx^3 & ; x \geq 1. \end{cases}$$

Določi števili  $a$  in  $b$  tako, da bo funkcija  $f$  zvezna in zvezno odvedljiva v točki  $x = 1$ .

8. Določi zvezo med parametroma  $a$  in  $b$  tako, da bo graf funkcije  $f(x) = a \sin \frac{x}{b}$  sekal ordinatno os pod kotom  $\frac{\pi}{3}$ .
9. Zapiši enačbo tangente na krivuljo  $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 1$ , ki je vzporedna premici  $y = -2x + 1$ .
10. Zapiši enačbo normale na krivuljo  $y = x^2 - 6x$ , ki je vzporedna premici  $2x - 4y = 5$ .
11. Zapiši enačbe vseh tangent na graf funkcije  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ , ki so vzporedne premici  $x + 2y + 3 = 0$ .
12. Dani sta funkciji  $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$  in  $g(x) = ax^2$ . Določi parameter  $a$  tako, da bo tangenta na graf funkcije  $f$  v točki  $x = 1$  hkrati tangenta na graf funkcije  $g$ .
13. Dani sta funkciji  $f(x) = x^2 - 7x + 6$  in  $g(x) = (x - 1)(x^2 + ax - 2)$ .
- Za katere vrednosti parametra  $a$  se grafa funkcij  $f$  in  $g$  sekata v točki  $T(1, 0)$  pod kotom  $\frac{\pi}{4}$ ?
  - Za katere  $x_0 \in \mathbb{R}$  tangenta na graf funkcije  $f$  v točki  $T(x_0, f(x_0))$  poteka skozi točko  $T(0, 2)$ ?
14. Ugotovi ali podana funkcija zadošča pogojem Rolleovega izreka na podanem intervalu:
- $f(x) = x^4 - 2x^2$  na  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ,
  - $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$  na  $[-1, 1]$ .
15. Naj bo funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna, odvedljiva in naj velja  $f(1) = f(0) + 1$ . Dokaži, da obstaja tak  $c \in (0, 1)$ , da velja  $f'(c) = 1$ . *Namig:* Oglej si funkcijo  $g(x) = f(x) - x$ .

16. S pomočjo Lagrangeovega izreka dokaži, da velja:

a)  $\frac{1}{a+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a}, a > 0,$

b)  $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctg b - \arctg a < \frac{b-a}{1+a^2}, 0 < a < b,$

c)  $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctg \frac{4}{3} < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}.$

17. Dana je funkcija  $f(x) = (x-2)e^{2x}$ . Izračunaj  $f'''(x)$ .

18. Dana je funkcija  $f(x) = x^2 \sin(ax)$ . Izračunaj  $f^{(50)}(x)$ .

19. Dana je funkcija  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ . Izračunaj  $f^{(n)}(x)$ .