Naloge za predmet *Teorija množic*

6. skupina nalog: števnost in neštevnost

1. Za vsako izmed naslednjih množic ugotovite, ali je števna:
   (a) Množica A vseh funkcij $f : \{0,1\} \longrightarrow \mathbf{N}$.
   (b) Množica B_n vseh funkcij $f : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \mathbf{N}$.
   (c) Množica $C = \cup_{n\in\mathbf{N}} B_n$.
   (d) Množica D vseh funkcij $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$.
   (e) Množica E vseh funkcij $f : \mathbf{N} \longrightarrow \{0,1\}$.
   (f) Množica F vseh funkcij $f : \mathbf{N} \longrightarrow \{0,1\}$, ki "skoraj povsod" imajo vrednost 0 (torej takih, za katere obstaja $N \in \mathbf{N}$ tako, da velja $f(n) = 0$ za vse $n \geq N$).
   (g) Množica G vseh funkcij $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, ki "skoraj povsod" imajo vrednost 1.
   (h) Množica H vseh funkcij $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, ki so "skoraj povsod" konstantne.
   (i) Množica I vseh dvočlenih podmnožic množice $\mathbf{N}$.
   (j) Množice J vseh končnih podmnožic množice N.

2. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

   Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

3. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}.$$

   Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

4. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbf{R}$, definirana s formulo

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \sim y \Leftrightarrow \sin x - \sin y \in \mathbf{Z}.$$

   Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}/\!\sim$ ni števna množica.

5. Relacija $\sim$ na $\mathbf{R}^2$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

   Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in da $\mathbf{R}^2/\!\sim$ ni števna množica.

6. Relacija $\sim$ na množici $\mathcal{P}$ vseh polinomov z realnimi koeficienti je definirana s formulo $f \sim g \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} f(0) = g(0)$. Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in določite moč $\mathcal{P}/\!\sim$.

7. Ugotovite, ali je množica

$$\{x \in \mathbf{N} \colon \exists n \in \mathbf{N},\, n\cos^7 x - \cos^3 x = \cos^{12} x + \cos x - 1\}$$

števna ali ne. Svojo trditev tudi dokažite.

8. Naj bo X poljubna množica. Relacija R na $\mathcal{P}(X)$ je definirana s formulo

$$(s,t) \in R \overset{def}{\Longleftrightarrow} |(s \setminus t) \cap (t \setminus s)| \leq \aleph_0.$$

Ugotovite, ali je R:

   (a) refleksivna,
   (b) simetrična,
   (c) tranzitivna,
   (d) antisimetrična.

Vsak odgovor podrobno utemeljite.

9. Naj bo definicijsko območje funkcije f števna množica. Dokažite, da je tudi njena slika (zaloga vrednosti) števna.

10. Dokažite, da je množica vseh končnih podmnožic števne množice števna.

11. Dokažite, da je množica vseh polinomov s celoštevilčnimi koeficienti števna.

12. Dokažite, da je množica vseh algebrskih števil (števil, ki so ničle polinomov s celoštevilčnimi koeficienti) števna.

13. Dokažite, da je vsaka množica paroma disjunktnih odprtih intervalov realnih števil števna.

14. Dokažite, da je množica vseh točk nezveznosti poljubne monotone funkcije $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ števna.

15. Naj bo A poljubna števna množica realnih števil. Ali je možno izbrati realno število x tako, da bo $\{x + a \colon a \in A\} \cap A = \emptyset$?